



Curso de Diseño de Estructuras Sismorresistentes

Quinta Parte

Análisis y Diseño Simplificado de Edificios Basado en Desplazamientos

PROF. EDUARDO MIRANDA

DEPARTMENT OF CIVIL & ENVIRONMENTAL ENGINEERING
STANFORD UNIVERSITY

OBJETIVOS DE ESTA PARTE DEL CURSO



1. Hacer un breve repaso del método de análisis dinámico modal espectral;
2. Presentar un método simplificado para estimar las demandas máximas de deformación de entrepiso;
3. Presentar un método desarrollado por su servidor con sus estudiantes de doctorado para el diseño basado en desplazamientos;
4. Presentar ejemplos.

Curso de Diseño Sismorresistente, Ecuador Julio 3-6, 2017

© 2017 Prof. Eduardo Miranda

ANÁLISIS MODAL

Ecuaciones modales para sistemas amortiguados



El sistema de ecuaciones de un sistema lineal amortiguado de varios grados de libertad está dado por:

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{k}\mathbf{u}(t) = \mathbf{p}(t)$$

Nuevamente el vector de desplazamientos $\mathbf{u}(t)$ puede escribirse como la superposición de la contribución de cada modo :

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{n=1}^N \mathbf{u}_n(t) = \sum_{n=1}^N \phi_n q_n(t)$$

En que $\mathbf{u}_n(t)$ contiene la contribución del modo n a cada uno de los grados de libertad dinámicos..

Substituyendo en la ecuación del movimiento obtenemos:

$$\sum_{n=1}^N \mathbf{m} \phi_n \ddot{q}_n(t) + \sum_{n=1}^N \mathbf{c} \phi_n \dot{q}_n(t) + \sum_{n=1}^N \mathbf{k} \phi_n q_n(t) = \mathbf{p}(t)$$

Curso de Diseño Sismorresistente, Ecuador Julio 3-6, 2017

© 2017 Prof. Eduardo Miranda

ANÁLISIS MODAL

Ecuaciones modales para sistemas amortiguados



Premultiplicando todos los términos por ϕ_n^T :

$$\sum_{n=1}^N \phi_n^T \mathbf{m} \phi_n \ddot{q}_n(t) + \sum_{n=1}^N \phi_n^T \mathbf{c} \phi_n \dot{q}_n(t) + \sum_{n=1}^N \phi_n^T \mathbf{k} \phi_n q_n(t) = \phi_n^T \mathbf{p}(t)$$

Si el sistema tiene un amortiguamiento clásico (e.g., amortiguamiento de Rayleigh)

$$\begin{aligned} \phi_n^T \mathbf{k} \phi_m &= 0 & \text{para } n \neq m & & K_n &= \phi_n^T \mathbf{k} \phi_n \\ \phi_n^T \mathbf{c} \phi_m &= 0 & \text{para } n \neq m & & C_n &= \phi_n^T \mathbf{c} \phi_n \\ \phi_n^T \mathbf{m} \phi_m &= 0 & \text{para } n \neq m & & M_n &= \phi_n^T \mathbf{m} \phi_n \end{aligned}$$

Por lo tanto podemos re-escribir el sistema de ecuaciones como:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{P}(t)$$


que representa un sistema de N ecuaciones diferenciales de movimiento DESACOPLADAS dadas por:

$$M_n \ddot{q}_n(t) + C_n \dot{q}_n(t) + K_n q_n(t) = P_n(t)$$

Curso de Diseño Sismorresistente, Ecuador Julio 3-6, 2017

© 2017 Prof. Eduardo Miranda

ANÁLISIS MODAL
Ecuaciones modales para sistemas amortiguados



En cada una de estas ecuaciones:

$$M_n \ddot{q}_n(t) + C_n \dot{q}_n(t) + K_n q_n(t) = P_n(t)$$

M_n , C_n , K_n y P_n son la masa, rigidez y fuerza generalizadas del modo n , las cuales son escalares calculados como :

$$K_n = \phi_n^T \mathbf{k} \phi_n$$

$$C_n = \phi_n^T \mathbf{c} \phi_n$$

$$M_n = \phi_n^T \mathbf{m} \phi_n$$

$$P_n = \phi_n^T \mathbf{p}(t)$$


Nuevamente, cada una de estas ecuaciones son ecuaciones diferenciales de movimiento DESACOPLADAS como las que vimos en la primera parte del curso.

Dividiendo cada ecuación por la masa generalizada, se pueden re-escribir como:

$$\ddot{q}_n(t) + 2\zeta_n \omega_n \dot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) = \frac{P_n(t)}{M_n}$$

Curso de Diseño Sismorresistente, Ecuador Julio 3-6, 2017 © 2017 Prof. Eduardo Miranda

ANÁLISIS MODAL
Ecuaciones modales para sistemas amortiguados



SISTEMA DESACOPLADO DE ECUACIONES DE MOVIMIENTO PARA SOLICITACIONES SÍSMICAS:

Las ecuaciones desacopladas antes presentadas son para fuerzas dinámicas directamente aplicadas a cada una de las masas del sistema. Para movimientos de terreno estas ecuaciones están dadas por:

$$M_n \ddot{q}_n(t) + C_n \dot{q}_n(t) + K_n q_n(t) = -\phi_n^T \mathbf{m} \ddot{u}_g(t)$$

Dividiendo entre la masa generalizada

$$\ddot{q}_n(t) + 2\zeta_n \omega_n \dot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) = -\Gamma_n \ddot{u}_g(t)$$

En que Γ_n es el *factor de participación modal* del modo de vibrar n , el cual se calcula como


$$\Gamma_n = \frac{L_n}{M_n} = \frac{\phi_n^T \mathbf{m} \mathbf{1}}{\phi_n^T \mathbf{m} \phi_n}$$

Para sistemas con masas concentradas (con matriz de masas diagonales) el factor de participación modal puede calcularse como:

$$\Gamma_n = \frac{L_n}{M_n} = \frac{\sum_{j=1}^N m_j \phi_{jn}}{\sum_{j=1}^N m_j \phi_{jn}^2}$$

Curso de Diseño Sismorresistente, Ecuador Julio 3-6, 2017 © 2017 Prof. Eduardo Miranda

ANÁLISIS MODAL
Ecuaciones modales para sistemas amortiguados



Cada una de las ecuaciones desacopladas está dada por:

$$\ddot{q}_n(t) + 2\zeta_n \omega_n \dot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) = -\Gamma_n \ddot{u}_g(t)$$

Recordando que la contribución del modo n a la respuesta también puede escribirse como:

$$\mathbf{u}_n(t) = \Gamma_n \phi_n \cdot D_n(t)$$

Controla la variación espacial del movimiento

Controla la variación temporal del movimiento


Substituyendo en las ecuaciones desacopladas obtenemos:

$$\ddot{D}_n(t) + 2\zeta_n \omega_n \dot{D}_n(t) + \omega_n^2 D_n(t) = -\ddot{u}_g(t)$$

En que $\ddot{D}_n(t)$, $\dot{D}_n(t)$ y $D_n(t)$ son la aceleración, velocidad y desplazamiento relativos de un sistema de un grado de libertad con frecuencia y fracción de amortiguamiento del modo n .

Curso de Diseño Sismorresistente, Ecuador Julio 3-6, 2017 © 2017 Prof. Eduardo Miranda

ANÁLISIS MODAL ESPECTRAL



Resumen de pasos a seguir:

1. Obtener periodos de vibración T_n y formas modales de vibración ϕ_n y factores de participación modal Γ_n
2. Para cada modo que contribuye en forma significativa a la respuesta de la estructura obtener la *respuesta pico* (desplazamiento, velocidad y aceleración absoluta) con la siguiente ecuación diferencial desacoplada de un grado de libertad:

$$\ddot{D}_n(t) + 2\zeta_n \omega_n \dot{D}_n(t) + \omega_n^2 D_n(t) = -\ddot{u}_g(t)$$

en que $\ddot{D}_n(t)$, $\dot{D}_n(t)$ y $D_n(t)$ son la aceleración, velocidad y desplazamiento relativos de un sistema de un grado de libertad con frecuencia y fracción de amortiguamiento del modo n . Si el espectro está disponible o se trata de un espectro de diseño se obtienen las ordenadas espectrales correspondientes a los periodos de vibración de la estructura.

Curso de Diseño Sismorresistente, Ecuador Julio 3-6, 2017 © 2017 Prof. Eduardo Miranda

ANÁLISIS MODAL ESPECTRAL



Resumen de pasos a seguir (continuación):

3. Obtener las respuestas modales pico con las siguientes ecuaciones:

Fuerzas modales: $f_{jn} = \Gamma_n \phi_{jn} m_j A_n$

Fuerzas cortantes modales: $V_{jn} = \sum_{j=1}^N f_{jn} = \sum_{j=1}^N \Gamma_n \phi_{jn} m_j A_n$

Desplazamientos modales: $u_{jn} = \Gamma_n \phi_{jn} D_n = \Gamma_n \phi_{jn} \frac{A_n}{\omega_n^2} = \Gamma_n \phi_{jn} C_{cn} g \frac{T_n^2}{4\pi^2}$

Distorsiones de entrepiso modales: $\frac{\Delta_{jn}}{h_{sj}} = \Gamma_n (\phi_{jn} - \phi_{j-1,n}) \frac{D_n}{h_{sj}} = \Gamma_n (\phi_{jn} - \phi_{j-1,n}) \frac{A_n}{\omega_n^2 h_{sj}}$

ANÁLISIS MODAL ESPECTRAL



Resumen de pasos a seguir (continuación):

4. Obtener UNA APROXIMACIÓN del valor pico de la respuesta por medio de una regla de combinación modal (e.g., SRSS o CQC)

SRSS $R_{\max} \approx \sqrt{\sum_{i=1}^{M \leq N} R_i^2}$

CQC $R_{\max} \approx \sqrt{\sum_{i=1}^{M \leq N} \sum_{j=1}^{M \leq N} (\rho_{i,j} R_i R_j)}$

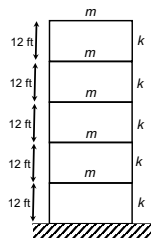
$$\rho_{i,j} = \frac{8(\xi_i \xi_j \omega_i \omega_j)(\xi_i \omega_i + \xi_j \omega_j) \omega_i \omega_j}{(\omega_i^2 + \omega_j^2)^2 + 4\xi_i \xi_j \omega_i \omega_j (\omega_i^2 + \omega_j^2) + 4(\xi_i^2 + \xi_j^2) \omega_i^2 \omega_j^2}$$

EJEMPLO ANÁLISIS MODAL ESPECTRAL



Ejemplo

Calcule las fuerzas laterales, cortantes de entrepiso, desplazamientos laterales y distorsiones de entrepiso para la estructura de cinco niveles mostrada en la figura (corresponde también a la mostrada en la figura 12.8.1 del libro de Chopra) al ser sometida al espectro de diseño mostrado en la siguiente diapositiva. Las rigideces de entrepiso son de 31.54 kip/in (5.6325 tonf/cm), las masas son de 100 kip (45.36 tonf) cada una y alturas de entrepiso son de 12 ft (3.65m) cada una. La fracción de amortiguamiento es 2% para todos los modos. (Este es el mismo edificio que ya habíamos analizado usando el método estático equivalente). Considere un factor de reducción de fuerzas R=8.



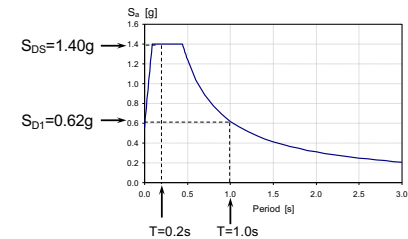
$m = 100 \text{ kip/g} = 45.36 \text{ tonf/g}$
 $k = 31.54 \text{ kip/in} = 5.63 \text{ tonf/cm}$

Note que, como lo menciona Chopra en su libro, este edificio es significativamente más flexible que un edificio real de cinco niveles (tiene un período fundamental mucho más largo). El edificio es mucho más flexible intencionalmente para mostrar la contribución de modos superiores de vibración.

EJEMPLO ANÁLISIS MODAL ESPECTRAL



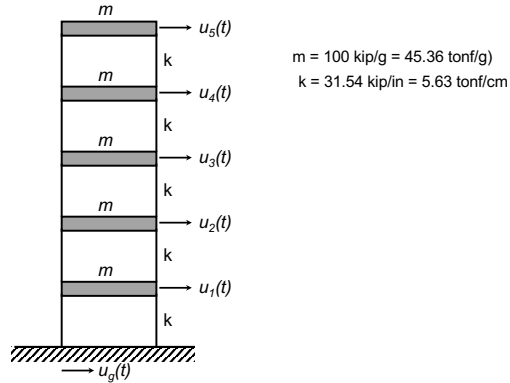
Ejemplo



EJEMPLO ANÁLISIS MODAL ESPECTRAL

Solución al ejemplo:

El primer paso (obtener periodos de vibrar, modos de vibrar y factores de participación modal) es el mismo que el en método modal en el tiempo (paso a paso). Se repite aquí para que el ejemplo quede completo.



$m = 100 \text{ kip/g} = 45.36 \text{ tonf/g}$
 $k = 31.54 \text{ kip/in} = 5.63 \text{ tonf/cm}$

EJEMPLO ANÁLISIS MODAL ESPECTRAL

Solución al ejemplo (continuación):

Para obtener periodos de vibración y formas modales debemos de resolver el problema de Eigenvalores, para lo cual antes debemos de ensamblar las matrices de masa y rigidez del sistema

Aquí lo haremos usando Matlab:

MATRIZ DE MASAS

```
>> m=[1 0 0 0;0 1 0 0;0 0 1 0;0 0 0 1]*100/386.4
m =
    0.25    0    0    0
    0    0.25    0    0
    0    0    0.25    0
    0    0    0    0.25
    0    0    0    0    0.25
```

MATRIZ DE RIGIDECES

```
>> k=31.54*[2 -1 0 0; -1 2 -1 0; 0 0 -1 2; 0 0 -1 1]
k =
    63.08   -31.54    0    0
   -31.54    63.08   -31.54    0
    0   -31.54    63.08   -31.54
    0    0   -31.54    63.08
    0    0    0   -31.54    31.54
```

EJEMPLO ANÁLISIS MODAL ESPECTRAL

Solución al ejemplo (continuación):

Las frecuencias circulares de vibración y periodos de vibración de la estructura están dados por:

$\omega_1 = 3.142 \text{ rad/s}$	$T_1 = 2.000 \text{ s}$
$\omega_2 = 9.172 \text{ rad/s}$	$T_2 = 0.685 \text{ s}$
$\omega_3 = 14.459 \text{ rad/s}$	$T_3 = 0.435 \text{ s}$
$\omega_4 = 18.574 \text{ rad/s}$	$T_4 = 0.338 \text{ s}$
$\omega_5 = 21.185 \text{ rad/s}$	$T_5 = 0.297 \text{ s}$

Usando el método del cociente de Rayleigh usando los resultados de un análisis estático habíamos estimado el periodo fundamental como 1.99s, esto es, casi el mismo al valor exacto de 2.0s.

EJEMPLO ANÁLISIS MODAL ESPECTRAL

Solución al ejemplo (continuación):

Para obtener las formas modales:

```
>> [phi,w2]=eig(k,m)
phi =
Columnas 1 a 3
    0.16989112404918   -0.45573414065525   0.59688478766684
    0.32601867960932   -0.59688478766684   0.16989112404918
    0.45573414065525   -0.32601867960932   -0.54852873198059
    0.54852873198059   0.16989112404918   -0.32601867960932
    0.59688478766684   0.54852873198059   0.45573414065525
Columnas 4 a 5
    0.54852873198059   -0.32601867960932
   -0.45573414065525   0.54852873198059
   -0.16989112404918   -0.59688478766684
    0.59688478766684   0.45573414065525
   -0.32601867960932   -0.16989112404918
```

EJEMPLO ANÁLISIS MODAL ESPECTRAL



Solución al ejemplo (continuación):

Las formas modales pueden normalizarse de muchas maneras. Por ejemplo, las formas modales calculadas con Matlab suelen estar normalizadas para obtener una matriz de masas generalizada igual a la matriz identidad $M_n=1$

O bien pueden normalizarse para ser igual a uno a nivel de techo: $\phi_{techo}=1$

Es importante recordar que los factores de participación dependen de cómo se normalizan los modos:

$$\Gamma_n = \frac{\phi_n^T [m] 1}{M_n} \longleftarrow M_n = \phi_n^T [m] \phi_n$$

Por lo tanto Γ_n es inversamente proporcional a las masas generalizadas

Pero la respuesta es independiente de cómo se normalicen los modos:

$$u_n(t) = \sum_{i=1}^n \phi_{in} \Gamma_i D_i(t)$$

EJEMPLO ANÁLISIS MODAL ESPECTRAL

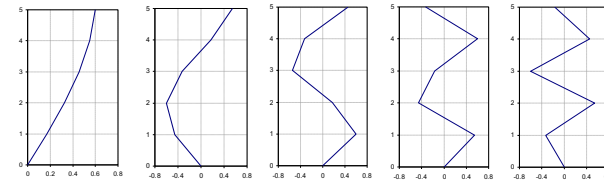


Solución al ejemplo (continuación):

Las formas modales ortonormalizadas están dadas por:

$$\{\phi_1\} = \begin{Bmatrix} 0.59688 \\ 0.54853 \\ 0.45573 \\ 0.32602 \\ 0.16989 \end{Bmatrix} \quad \{\phi_2\} = \begin{Bmatrix} 0.54853 \\ 0.16989 \\ -0.32602 \\ -0.59688 \\ -0.45573 \end{Bmatrix} \quad \{\phi_3\} = \begin{Bmatrix} 0.45573 \\ -0.32602 \\ -0.54853 \\ 0.16989 \\ 0.59688 \end{Bmatrix} \quad \{\phi_4\} = \begin{Bmatrix} -0.32602 \\ 0.59688 \\ -0.16989 \\ -0.45573 \\ 0.54853 \end{Bmatrix} \quad \{\phi_5\} = \begin{Bmatrix} -0.16989 \\ 0.45573 \\ -0.59688 \\ 0.54853 \\ -0.32602 \end{Bmatrix}$$

(NOTA: Aquí las formas modales han sido ordenadas de techo a primer nivel)



EJEMPLO ANÁLISIS MODAL ESPECTRAL



Solución al ejemplo (continuación):

Los factores de participación modal se calculan como :

$$\Gamma_n = \frac{\phi_n^T [m] \{1\}}{\phi_n^T [m] \phi_n} = \frac{\sum_{j=1}^N m_j \phi_{jn}}{\sum_{j=1}^N m_j \phi_{jn}^2}$$

Haciendo las operaciones obtenemos:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= 2.097 \\ \Gamma_2 &= -0.660 \\ \Gamma_3 &= 0.348 \\ \Gamma_4 &= 0.194 \\ \Gamma_5 &= -0.089 \end{aligned}$$

Nuevamente hay que siempre recordar que los factores de participación modal Γ_n dependen de cómo se normalicen los modos, por lo que el número en sí no dice si la participación de dicho modo será grande o pequeña. Sin embargo el producto $\Gamma_n \phi_n$ es independiente (no cambia) de la forma en que los modos hayan sido normalizados..

EJEMPLO ANÁLISIS MODAL ESPECTRAL



Solución al ejemplo (continuación):

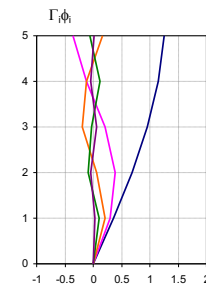
Los factores de participación modal se calculan como :

$$\Gamma_n = \frac{\phi_n^T [m] \{1\}}{\phi_n^T [m] \phi_n} = \frac{\sum_{j=1}^N m_j \phi_{jn}}{\sum_{j=1}^N m_j \phi_{jn}^2}$$

Haciendo las operaciones obtenemos:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= 2.097 \\ \Gamma_2 &= -0.660 \\ \Gamma_3 &= 0.348 \\ \Gamma_4 &= 0.194 \\ \Gamma_5 &= -0.089 \end{aligned}$$

Hay que siempre recordar que los factores de participación modal Γ_n dependen de cómo se normalicen los modos. Sin embargo el producto $\Gamma_n \phi_n$ es independiente de la forma en que los modos hayan sido normalizados (no cambia).



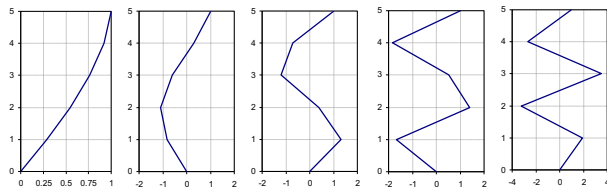
EJEMPLO ANÁLISIS MODAL PASO A PASO (Historia del tiempo)



Solución al ejemplo (continuación):

Normalizando los modos a uno a nivel de techo obtenemos:

$$\{\phi_1\} = \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ 0.9190 \\ 0.7635 \\ 0.5462 \\ 0.2846 \end{Bmatrix} \quad \{\phi_2\} = \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ 0.3097 \\ -0.5944 \\ -1.0882 \\ -0.8308 \end{Bmatrix} \quad \{\phi_3\} = \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ -0.7154 \\ -1.2036 \\ 0.3728 \\ 1.3097 \end{Bmatrix} \quad \{\phi_4\} = \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ -1.8308 \\ 0.5211 \\ 1.3979 \\ -1.6825 \end{Bmatrix} \quad \{\phi_5\} = \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ -2.6825 \\ 3.5133 \\ -3.2287 \\ 1.9190 \end{Bmatrix}$$



Curso de Diseño Sismorresistente, Ecuador Julio 3-6, 2017

© 2017 Prof. Eduardo Miranda

EJEMPLO ANÁLISIS MODAL PASO A PASO (Historia del tiempo)



Solución al ejemplo (continuación):

Los factores de participación modal se calculan como :

$$\Gamma_n = \frac{\phi_n^T [m] \{1\}}{\phi_n^T [m] \phi_n} = \frac{\sum_{j=1}^N m_j \phi_{jn}}{\sum_{j=1}^N m_j \phi_{jn}^2}$$

Haciendo las operaciones obtenemos:

Gamma =	$\Gamma_1 = 1.252$
1.25170169910163	$\Gamma_2 = -0.362$
-0.36214840629168	$\Gamma_3 = 0.159$
0.15857845507663	$\Gamma_4 = -0.063$
-0.06317250109875	$\Gamma_5 = 0.015$
0.01504075320217	

Siempre hay que recordar que los factores de participación modal Γ_n dependen de cómo se normalicen los modos, por lo que el número en sí no dice si la participación de dicho modo será grande o pequeña. Sin embargo el producto $\Gamma_n \phi_n$ es independiente (no cambia) de la forma en que los modos hayan sido normalizados..

Curso de Diseño Sismorresistente, Ecuador Julio 3-6, 2017

© 2017 Prof. Eduardo Miranda

EJEMPLO ANÁLISIS MODAL PASO A PASO (Historia del tiempo)



Solución al ejemplo (continuación):

Los factores de participación modal :

Con modos ortonormalizados:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= 2.097 \\ \Gamma_2 &= -0.660 \\ \Gamma_3 &= 0.348 \\ \Gamma_4 &= 0.194 \\ \Gamma_5 &= -0.089 \end{aligned}$$

Con modos normalizados a uno a nivel de techo:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= 1.252 \\ \Gamma_2 &= -0.362 \\ \Gamma_3 &= 0.159 \\ \Gamma_4 &= -0.063 \\ \Gamma_5 &= 0.015 \end{aligned}$$

Siempre hay que recordar que los factores de participación modal Γ_n dependen de cómo se normalicen los modos, por lo que el número en sí no dice si la participación de dicho modo será grande o pequeña. Sin embargo el producto $\Gamma_n \phi_n$ es independiente (no cambia) de la forma en que los modos hayan sido normalizados..

Curso de Diseño Sismorresistente, Ecuador Julio 3-6, 2017

© 2017 Prof. Eduardo Miranda

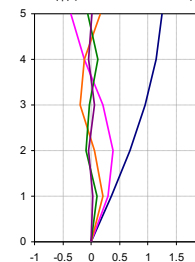
EJEMPLO ANÁLISIS MODAL PASO A PASO (Historia del tiempo)



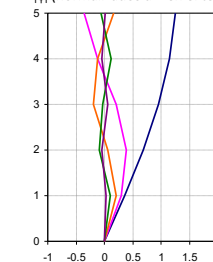
Solución al ejemplo (continuación):

Siempre hay que recordar que los factores de participación modal Γ_n dependen de cómo se normalicen los modos. Sin embargo el producto $\Gamma_n \phi_n$ es independiente (no cambia) de la forma en que los modos hayan sido normalizados..

$\Gamma_n \phi_n$ (ortonormalizados)



$\Gamma_n \phi_n$ (normalizados a 1 en el techo)



Curso de Diseño Sismorresistente, Ecuador Julio 3-6, 2017

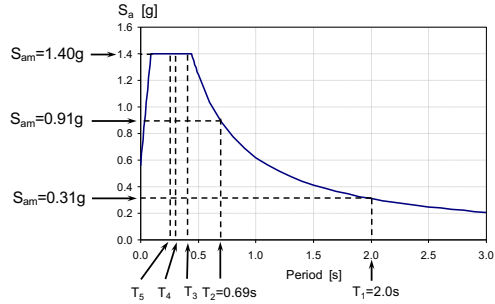
© 2017 Prof. Eduardo Miranda

EJEMPLO ANÁLISIS MODAL ESPECTRAL



Solución al ejemplo (continuación):

Entrando al espectro con los periodos de vibración para obtener las ordenadas espectrales tenemos:



Curso de Diseño Sismorresistente, Ecuador Julio 3-6, 2017

© 2017 Prof. Eduardo Miranda

EJEMPLO ANÁLISIS MODAL ESPECTRAL



Solución al ejemplo (continuación):

Los coeficientes sísmicos modales se calculan con la siguiente ecuación:

$$C_{sm} = \frac{S_{am}}{(R/I)}$$

Haciendo operaciones obtenemos:

$$C_{s1} = 0.31 / 8 = 0.0388$$

$$C_{s2} = 0.91 / 8 = 0.1131$$

$$C_{s3} = 1.40 / 8 = 0.1750$$

$$C_{s4} = 1.40 / 8 = 0.1750$$

$$C_{s5} = 1.40 / 8 = 0.1750$$

Curso de Diseño Sismorresistente, Ecuador Julio 3-6, 2017

© 2017 Prof. Eduardo Miranda

EJEMPLO ANÁLISIS MODAL ESPECTRAL



Solución al ejemplo (continuación):

Las **fuerzas modales** se calculan con la siguiente ecuación:

$$f_{jn} = \Gamma_n \phi_{jn} m_j A_n$$

PISO	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4	ϕ_5	Γ_1	A_1	m_1
R	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.252	0.0388	100.0
5	0.9190	0.3097	-0.7154	-1.8308	-2.6825	0.362	0.1131	100.0
4	0.7635	-0.5944	-1.2036	0.5211	3.5133	0.159	0.1750	100.0
3	0.5462	-1.0882	0.3728	1.3979	-3.2287	0.063	0.1750	100.0
2	0.2846	-0.8308	1.3097	-1.6825	1.9190	0.015	0.1750	100.0

PISO	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_{SRSS}
R	4.86	-4.10	2.78	-1.11	0.26	7.025
5	4.46	-1.27	-1.99	2.02	-0.71	5.483
4	3.71	2.43	-3.34	-0.58	0.92	5.659
3	2.65	4.46	1.03	-1.55	-0.85	5.575
2	1.38	3.40	3.63	1.86	0.51	5.515

Note que sería incorrecto obtener cortantes de entrepiso sumando estas fuerzas.

Curso de Diseño Sismorresistente, Ecuador Julio 3-6, 2017

© 2017 Prof. Eduardo Miranda

EJEMPLO ANÁLISIS MODAL ESPECTRAL



Solución al ejemplo (continuación):

Los **cortantes modales de entrepiso** se calculan de la siguiente ecuación:

PISO	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_{SRSS}
R	4.86	-4.10	2.78	-1.11	0.26	7.025
5	4.46	-1.27	-1.99	2.02	-0.71	5.483
4	3.71	2.43	-3.34	-0.58	0.92	5.659
3	2.65	4.46	1.03	-1.55	-0.85	5.575
2	1.38	3.40	3.63	1.86	0.51	5.515

Note que sería incorrecto obtener cortantes de entrepiso sumando estas fuerzas.

ENTREPISO	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_{SRSS}
5	4.86	-4.10	2.78	-1.11	0.26	7.025
4	9.32	-5.36	0.79	0.92	-0.44	10.830
3	13.03	-2.93	-2.55	0.34	0.48	13.608
2	15.68	1.53	-1.52	-1.20	-0.37	15.877
1	17.06	4.93	2.12	0.66	0.14	17.899

Curso de Diseño Sismorresistente, Ecuador Julio 3-6, 2017

© 2017 Prof. Eduardo Miranda

EJEMPLO ANÁLISIS MODAL ESPECTRAL



Solución al ejemplo (continuación):

Las **desplazamientos modales** se calculan con la siguiente ecuación:

$$u_{jn} = \Gamma_n \phi_{jn} D_n = \Gamma_n \phi_{jn} \frac{A_n}{\omega_n^2} = \Gamma_n \phi_{jn} C_{cr} g \frac{T_n^2}{4\pi^2}$$

PISO	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4	ϕ_5	Γ_1	A_1	T_1
R	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.252	0.0388	2.000 s
5	0.9190	0.3097	-0.7154	-1.8308	-2.6825	-0.362	0.1131	0.685 s
4	0.7635	-0.5944	-1.2036	0.5211	3.5133	0.159	0.1750	0.435 s
3	0.5462	-1.0882	0.3728	1.9379	-3.2287	-0.063	0.1750	0.338 s
2	0.2846	-0.8308	1.3097	-1.6825	1.9190	0.015	0.1750	0.297 s

PISO	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_{SRSS}
R	1.8997	-0.1880	0.0513	-0.0124	0.0023	1.910
5	1.7458	-0.0582	-0.0367	0.0227	-0.0061	1.747
4	1.4505	0.1118	-0.0617	-0.0064	0.0080	1.456
3	1.0376	0.2046	0.0191	-0.0173	-0.0073	1.058
2	0.5407	0.1562	0.0671	0.0208	0.0043	0.567

Note que sería incorrecto obtener deformaciones de entrespiso obteniendo diferencias de estos valores.

OJO QUE ESTOS DESPLAZAMIENTOS HAN SIDO CALCULADOS CON FUERZAS REDUCIDAS. UNA MEJOR ESTIMACIÓN SE OBTIENE MULTIPLICANDO ESTOS DESPLAZAMIENTOS POR EL FACTOR DE REDUCCIÓN R Y POR EL FACTOR C_R

EJEMPLO ANÁLISIS MODAL ESPECTRAL



Solución al ejemplo (continuación):

Las **distorsiones modales** se calculan con la siguiente ecuación:

$$\frac{\Delta_{jn}}{h_{sj}} = \Gamma_n (\phi_{jn} - \phi_{j-1,n}) \frac{D_n}{h_{sj}} = \Gamma_n (\phi_{jn} - \phi_{j-1,n}) \frac{A_n}{\omega_n^2 h_{sj}} = \Gamma_n (\phi_{jn} - \phi_{j-1,n}) C_{cr} g \frac{T_n^2}{4\pi^2 h_{sj}}$$

ENTRESPISO	$\phi_1^r - \phi_{1,1}$	$\phi_2^r - \phi_{1,2}$	$\phi_3^r - \phi_{1,3}$	$\phi_4^r - \phi_{1,4}$	$\phi_5^r - \phi_{1,5}$	Γ_1	A_1	T_1
R	0.0810	0.6903	1.7154	2.8308	3.6825	1.252	0.0388	2.000 s
5	0.1555	0.9041	0.4882	-2.3519	-6.1958	-0.362	0.1131	0.685 s
4	0.2173	0.4938	-1.5764	-0.8768	6.7420	0.159	0.1750	0.435 s
3	0.2816	-0.2573	-0.9389	3.0804	-5.1477	-0.063	0.1750	0.338 s
2	0.2846	-0.8308	1.3097	-1.6825	1.9190	0.015	0.1750	0.297 s

ENTRESPISO	Δ_1/h	Δ_2/h	Δ_3/h	Δ_4/h	Δ_5/h	Δ_{SRSS}/h
5	0.0011	-0.0009	0.0006	-0.0002	0.0001	0.002
4	0.0021	-0.0012	0.0002	0.0002	-0.0001	0.002
3	0.0029	-0.0006	-0.0006	0.0001	0.0001	0.003
2	0.0035	0.0003	-0.0003	-0.0003	-0.0001	0.003
1	0.0038	0.0011	0.0005	0.0001	0.0000	0.004

EJEMPLO ANÁLISIS MODAL ESPECTRAL



Solución al ejemplo (continuación):

Comparación de distorsiones de entrespiso haciendo mal y haciendolo bien

PISO	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_{SRSS}	$\Delta = u_i - u_{i-1}$	Δ/h
R	1.8997	-0.1880	0.0513	-0.0124	0.0023	1.910	0.162	0.0011
5	1.7458	-0.0582	-0.0367	0.0227	-0.0061	1.747	0.291	0.0020
4	1.4505	0.1118	-0.0617	-0.0064	0.0080	1.456	0.398	0.0028
3	1.0376	0.2046	0.0191	-0.0173	-0.0073	1.058	0.491	0.0034
2	0.5407	0.1562	0.0671	0.0208	0.0043	0.567	0.567	0.0039



ENTRESPISO	Δ_1/h	Δ_2/h	Δ_3/h	Δ_4/h	Δ_5/h	Δ_{SRSS}	Δ_{SRSS}/h
5	0.1539	-0.1298	0.0879	-0.0350	0.0083	0.223	0.0015
4	0.2953	-0.1700	0.0250	0.0291	-0.0140	0.343	0.0024
3	0.4128	-0.0929	-0.0808	0.0109	0.0153	0.431	0.0030
2	0.4969	0.0484	-0.0480	-0.0381	-0.0117	0.503	0.0035
1	0.5407	0.1562	0.0671	0.0208	0.0043	0.567	0.0039



OJO QUE ESTAS SON DISTORSIONES DE ENTRESPISO HAN SIDO CALCULADAS CON FUERZAS REDUCIDAS. UNA MEJOR ESTIMACIÓN SE OBTIENE MULTIPLICANDO ESTAS DISTORSIONES POR EL FACTOR DE REDUCCIÓN R Y POR EL FACTOR C_R

CONTRIBUCIÓN DE MODOS SUPERIORES



En edificios, por lo general, la contribución de los modos superiores a la respuesta sísmica se incrementa para diferentes parámetros de respuesta de la siguiente forma:



- Aceleraciones de piso
- Fuerzas en los diafragmas y colectores
- Momentos de volteo de entrespiso
- Cortantes de entrespiso
- Deformaciones de entrespiso
- Desplazamientos laterales

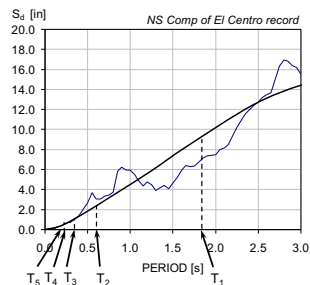
CONTRIBUCIÓN DE MODOS SUPERIORES



Porqué los desplazamientos laterales no se ven muy influidos por los modos superiores?

$$u_j(t) = \sum_{n=1}^N \Gamma_n \phi_{jn} \overline{D}_n(t)$$

$$u_{j0} = \left[\sum_{n=1}^N (\Gamma_n \phi_{jn} S_{d,n})^2 \right]^{1/2}$$



Curso de Diseño Sismorresistente, Ecuador Julio 3-6, 2017

© 2017 Prof. Eduardo Miranda

CONTRIBUCIÓN DE MODOS SUPERIORES



Del ejemplo de análisis modal espectral

PISO	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_{SRSS}
R	1.8997	-0.1880	0.0513	-0.0124	0.0023	1.910
5	1.7458	-0.0582	-0.0367	0.0227	-0.0061	1.747
4	1.4505	0.1118	-0.0617	-0.0064	0.0080	1.456
3	1.0376	0.2046	0.0191	-0.0173	-0.0073	1.058
2	0.5407	0.1562	0.0671	0.0208	0.0043	0.567

Curso de Diseño Sismorresistente, Ecuador Julio 3-6, 2017

© 2017 Prof. Eduardo Miranda

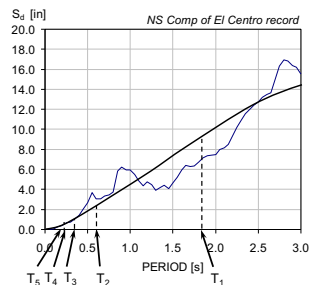
CONTRIBUCIÓN DE MODOS SUPERIORES



Por la misma razón las distorsiones de entrepiso suelen tener poca influencia de modos superiores.

$$IDR_j(t) = (1/h_j) \sum_{n=1}^N \Gamma_n (\phi_{jn} - \phi_{j-1,n}) \overline{D}_n(t)$$

$$IDR_{j0} = (1/h_j) \left[\sum_{n=1}^N (\Gamma_n (\phi_{jn} - \phi_{j-1,n}) S_{d,n})^2 \right]^{1/2}$$



Curso de Diseño Sismorresistente, Ecuador Julio 3-6, 2017

© 2017 Prof. Eduardo Miranda

CONTRIBUCIÓN DE MODOS SUPERIORES



Del ejemplo de análisis modal espectral

ENTREPISO	Δ_1/h	Δ_2/h	Δ_3/h	Δ_4/h	Δ_5/h	Δ_{SRSS}	Δ_{SRSS}/h
5	0.1539	-0.1298	0.0879	-0.0350	0.0083	0.223	0.0015
4	0.2953	-0.1700	0.0250	0.0291	-0.0140	0.343	0.0024
3	0.4128	-0.0929	-0.0808	0.0109	0.0153	0.431	0.0030
2	0.4969	0.0484	-0.0480	-0.0381	-0.0117	0.503	0.0035
1	0.5407	0.1562	0.0671	0.0208	0.0043	0.567	0.0039

Curso de Diseño Sismorresistente, Ecuador Julio 3-6, 2017

© 2017 Prof. Eduardo Miranda

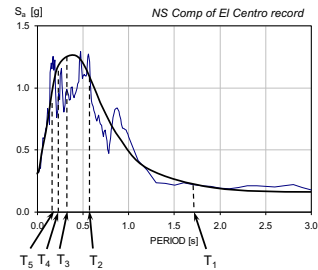
CONTRIBUCIÓN DE MODOS SUPERIORES



Porqué parámetros de respuesta que dependen de fuerzas laterales (e.g. Fuerzas modales, cortantes de entrepiso, aceleraciones de piso, etc.) se ven más influidos por modos superiores?

$$f_j(t) = \sum_{n=1}^N \Gamma_n \phi_{jn} m_j \ddot{A}_n(t)$$

$$f_{j0} \approx \left[\sum_{n=1}^N \left(\Gamma_n \phi_{jn} m_j S_{a,n} \right)^2 \right]^{1/2}$$



Curso de Diseño Sismorresistente, Ecuador Julio 3-6, 2017

© 2017 Prof. Eduardo Miranda

CONTRIBUCIÓN DE MODOS SUPERIORES



Del ejemplo de análisis modal espectral

Los **cortantes de entrepiso** son:

ENTREPISO	V ₁	V ₂	V ₃	V ₄	V ₅	V _{SRSS}
5	4.86	-4.10	2.78	-1.11	0.26	7.025
4	9.32	-5.36	0.79	0.92	-0.44	10.830
3	13.03	-2.93	-2.55	0.34	0.48	13.608
2	15.68	1.53	-1.52	-1.20	-0.37	15.877
1	17.06	4.93	2.12	0.66	0.14	17.899

Claramente si despreciamos los modos superiores estaríamos subestimando los cortantes de entrepiso. En este ejemplo el cortante basal solo sería subestimado un poco (17.06 vs 17.9) pero las subestimaciones en otros niveles son mucho mayores (e.g., 4.86 vs 7.02)

Curso de Diseño Sismorresistente, Ecuador Julio 3-6, 2017

© 2017 Prof. Eduardo Miranda

CONTRIBUCIÓN DE MODOS SUPERIORES



Del ejemplo de análisis modal espectral

Las **fuerzas modales** que calculamos en el ejemplo son:

PISO	f ₁	f ₂	f ₃	f ₄	f ₅	f _{SRSS}
R	4.86	-4.10	2.78	-1.11	0.26	7.025
5	4.46	-1.27	-1.99	2.02	-0.71	5.483
4	3.71	2.43	-3.34	-0.58	0.92	5.659
3	2.65	4.46	1.03	-1.55	-0.85	5.575
2	1.38	3.40	3.63	1.86	0.51	5.515

Claramente si despreciamos los modos superiores estaríamos subestimando en forma muy importante las fuerzas modales. En este ejemplo la fuerza modal en el segundo piso sería subestimada fuertemente (1.38 vs. 5.5 !!!)

Curso de Diseño Sismorresistente, Ecuador Julio 3-6, 2017

© 2017 Prof. Eduardo Miranda

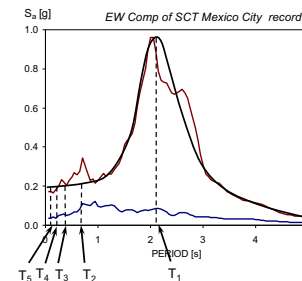
CONTRIBUCIÓN DE MODOS SUPERIORES



Los comentarios anteriores deben también tomar en cuenta el contenido de frecuencia del movimiento de terreno. Por ejemplo para ciertas estructuras aun parámetros de respuesta que dependen de aceleraciones pueden estar fuertemente dominados por el primer modo.

$$f_j(t) = \sum_{n=1}^N \Gamma_n \phi_{jn} m_j \ddot{A}_n(t)$$

$$f_{j0} \approx \left[\sum_{n=1}^N \left(\Gamma_n \phi_{jn} m_j S_{a,n} \right)^2 \right]^{1/2}$$



Curso de Diseño Sismorresistente, Ecuador Julio 3-6, 2017

© 2017 Prof. Eduardo Miranda

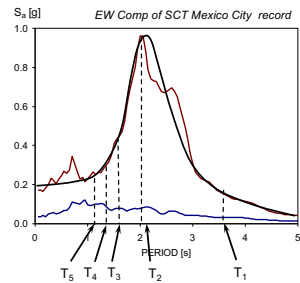
CONTRIBUCIÓN DE MODOS SUPERIORES



O Bien por el segundo modo

$$f_j(t) = \sum_{n=1}^N \Gamma_n \phi_{jn} m_j \ddot{u}_n(t)$$

$$f_{j0} \approx \left[\sum_{n=1}^N (\Gamma_n \phi_{jn} m_j S_{jn})^2 \right]^{1/2}$$



Curso de Diseño Sismorresistente, Ecuador Julio 3-6, 2017

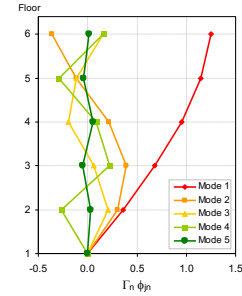
© 2017 Prof. Eduardo Miranda

CONTRIBUCIÓN DE MODOS SUPERIORES



Cuando debemos juzgar que tan importante puede ser la influencia de los modos superiores también debemos tomar en cuenta las propiedades dinámicas de la estructuras. Por ejemplo cuando calculamos desplazamientos laterales hacemos lo siguiente:

$$u_j(t) = \sum_{n=1}^N \Gamma_n \phi_{jn} D_n(t)$$



Curso de Diseño Sismorresistente, Ecuador Julio 3-6, 2017

© 2017 Prof. Eduardo Miranda

CONTRIBUCIÓN DE MODOS SUPERIORES



Del ejemplo de análisis modal espectral

PISO	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_{SRSS}
R	1.8997	-0.1880	0.0513	-0.0124	0.0023	1.910
5	1.7458	-0.0582	-0.0367	0.0227	-0.0061	1.747
4	1.4505	0.1118	-0.0617	-0.0064	0.0080	1.456
3	1.0376	0.2046	0.0191	-0.0173	-0.0073	1.058
2	0.5407	0.1562	0.0671	0.0208	0.0043	0.567

Contribuciones (en %) a los desplazamientos laterales

PISO	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5
R	98.95%	0.97%	0.07%	0.00%	0.00%
5	99.83%	0.11%	0.04%	0.02%	0.00%
4	99.23%	0.59%	0.18%	0.00%	0.00%
3	96.20%	3.74%	0.03%	0.03%	0.00%
2	90.87%	7.59%	1.40%	0.13%	0.01%

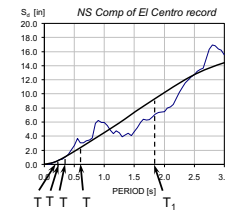
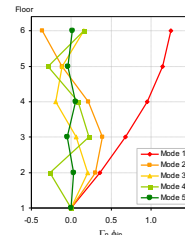
Curso de Diseño Sismorresistente, Ecuador Julio 3-6, 2017

© 2017 Prof. Eduardo Miranda

CONTRIBUCIÓN DE MODOS SUPERIORES



$$u_j(t) = \sum_{n=1}^N \Gamma_n \phi_{jn} D_n(t)$$



Contribuciones (en %) a los desplazamientos laterales

PISO	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5
R	98.95%	0.97%	0.07%	0.00%	0.00%
5	99.83%	0.11%	0.04%	0.02%	0.00%
4	99.23%	0.59%	0.18%	0.00%	0.00%
3	96.20%	3.74%	0.03%	0.03%	0.00%
2	90.87%	7.59%	1.40%	0.13%	0.01%

Curso de Diseño Sismorresistente, Ecuador Julio 3-6, 2017

© 2017 Prof. Eduardo Miranda

CONTRIBUCIÓN DE MODOS SUPERIORES

En el caso de distorsiones de entrepiso, las propiedades dinámicas que nos interesan son diferentes.

$$IDR_j(t) = (1/h_j) \sum_{n=1}^N \Gamma_n (\phi_{jn} - \phi_{j-1,n}) D_n(t)$$

La derivada de los modos de vibrar con respecto a la altura es MUY IMPORTANTE en ingeniería sismorresistente!

Curso de Diseño Sismorresistente, Ecuador Julio 3-6, 2017 © 2017 Prof. Eduardo Miranda

CONTRIBUCIÓN DE MODOS SUPERIORES

Del ejemplo de análisis modal espectral

ENTREPISO	Δ_1/h	Δ_2/h	Δ_3/h	Δ_4/h	Δ_5/h	Δ_{SRSS}	Δ_{SRSS}/h
5	0.1539	-0.1298	0.0879	-0.0350	0.0083	0.223	0.0015
4	0.2953	-0.1700	0.0250	0.0291	-0.0140	0.343	0.0024
3	0.4128	-0.0929	-0.0808	0.0109	0.0153	0.431	0.0030
2	0.4969	0.0484	-0.0480	-0.0381	-0.0117	0.503	0.0035
1	0.5407	0.1562	0.0671	0.0208	0.0043	0.567	0.0039

Contribuciones (en %) a las distorsiones de entrepiso

ENTREPISO	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5
R	47.79%	33.99%	15.60%	2.48%	0.14%
5	74.05%	24.53%	0.53%	0.72%	0.17%
4	91.66%	4.64%	3.51%	0.06%	0.13%
3	97.54%	0.92%	0.91%	0.57%	0.05%
2	90.87%	7.59%	1.40%	0.13%	0.01%

Curso de Diseño Sismorresistente, Ecuador Julio 3-6, 2017 © 2017 Prof. Eduardo Miranda

MÉTODO RÁPIDO (APROXIMADO) DE ESTIMACIÓN DE DEFORMACIONES LATERALES EN EDIFICIOS

Esta parte de las notas está basada en un método que desarrollé a finales de los 90's (puedo darles un par de artículos si están interesados en conocer más detalles)

APPROXIMATE SEISMIC LATERAL DEFORMATION DEMANDS IN MULTISTORY BUILDINGS

By Eduardo Miranda¹

ABSTRACT: An approximate method to estimate the maximum lateral deformation demands in multistory buildings responding primarily in the fundamental mode when subjected to earthquake ground motions is presented. This method permits a rapid estimation of the maximum roof displacement and of the maximum interstory drift for a given acceleration time history or for a given displacement response spectrum. A multistory building is modeled as an equivalent continuum structure consisting of a combination of a flexural cantilever beam and a shear cantilever beam. The simplified model is used to investigate the ratio of the spectral displacement to the roof displacement and the ratio of the maximum interstory drift ratio to the roof drift ratio. The effect of the distribution of lateral forces along the height of the building and of the ratio of overall flexural and shear deformations is examined. Lateral deformation demands of a 10-story steel building computed with the simplified method when subjected to various earthquake ground motions are compared with those computed using step-by-step time history analyses. It is shown that the method provides good approximations, which are useful for the preliminary design of new buildings or for a rapid evaluation of existing buildings.

1997. This paper is part of the *Journal of Structural Engineering*, Vol. 125, No. 4, April, 1999. ©ASCE, ISSN 0733-9445/99/0004-0417-0425/
JOURNAL OF STRUCTURAL ENGINEERING / APRIL 1999

Curso de Diseño Sismorresistente, Ecuador Julio 3-6, 2017 © 2017 Prof. Eduardo Miranda

MÉTODO RÁPIDO (APROXIMADO) DE ESTIMACIÓN DE DEFORMACIONES LATERALES EN EDIFICIOS

Como hemos comentado el daño estructural y muchos tipos de daño no estructural son el resultado de deformaciones laterales.

Un buen parámetro que ofrece una medida de las deformaciones laterales globales en un edificio es el desplazamiento de techoazotea (desplazamiento relativo al terreno)

En el caso de puentes una medida de deformación global es el desplazamiento lateral del tablero de la superestructura (donde se ubica la mayor parte de la masa).

Curso de Diseño Sismorresistente, Ecuador Julio 3-6, 2017 © 2017 Prof. Eduardo Miranda

MÉTODO RÁPIDO (APROXIMADO) DE ESTIMACIÓN DE DEFORMACIONES LATERALES EN EDIFICIOS



ESTIMACIÓN DEL DESPLAZAMIENTO DE TECHO / AZOTEA:

En un edificio con comportamiento elástico la historia de desplazamientos en el techo se calcula como:

$$u_{roof}(t) = \sum_{n=1}^N \Gamma_n \phi_{roof,n} D_n(t)$$

Para la mayoría de los edificios, como vimos anteriormente, se puede obtener una buena aproximación de la historia de desplazamiento de techo / azotea tomando en cuenta únicamente el primer modo de vibrar de la estructura

$$u_{roof}(t) \approx \Gamma_1 \phi_{roof,1} D_1(t)$$

Por lo tanto el valor máximo (pico) del desplazamiento de techo / azotea puede calcularse como

$$u_{roof} \approx \Gamma_1 \phi_{roof,1} S_{d,1}$$

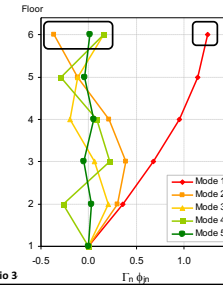
MÉTODO RÁPIDO (APROXIMADO) DE ESTIMACIÓN DE DEFORMACIONES LATERALES EN EDIFICIOS



ESTIMACIÓN DEL DESPLAZAMIENTO DE TECHO / AZOTEA:

Esta aproximación requiere que la contribución de los modos superiores al desplazamiento de techo / azotea sea relativamente pequeña. Pero, como hemos visto, en la mayoría de los casos esto es lo que ocurre. ¿Porqué?

1. A nivel de techo /azotea el producto $\Gamma_n \phi_{jn}$ de los modos superiores es por lo general mucho menor al del primer modo



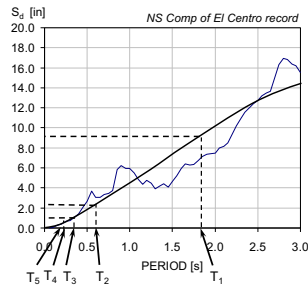
$$u_j(t) = \sum_{n=1}^N \Gamma_n \phi_{jn} D_n(t)$$

MÉTODO RÁPIDO (APROXIMADO) DE ESTIMACIÓN DE DEFORMACIONES LATERALES EN EDIFICIOS



ESTIMACIÓN DEL DESPLAZAMIENTO DE TECHO / AZOTEA:

2. Para la mayor parte de edificios y movimientos de terreno $S_{d,1} \gg S_{d,2} > S_{d,3} > S_{d,4}$ etc.



En este ejemplo:

$$S_{d,1} \approx 4$$

$$S_{d,1} \approx 9$$

MÉTODO RÁPIDO (APROXIMADO) DE ESTIMACIÓN DE DEFORMACIONES LATERALES EN EDIFICIOS



ESTIMACIÓN DEL DESPLAZAMIENTO DE TECHO / AZOTEA:

Del ejemplo de análisis modal espectral

PISO	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_{SESS}
R	1.8997	-0.1880	0.0513	-0.0124	0.0023	1.910
5	1.7458	-0.0582	-0.0367	0.0227	-0.0061	1.747
4	1.4505	0.1118	-0.0617	-0.0064	0.0080	1.456
3	1.0376	0.2046	0.0191	-0.0173	-0.0073	1.058
2	0.5407	0.1562	0.0671	0.0208	0.0043	0.567

Contribuciones (en %) a los desplazamientos laterales

PISO	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5
R	98.95%	0.97%	0.07%	0.00%	0.00%
5	99.83%	0.11%	0.04%	0.02%	0.00%
4	99.23%	0.59%	0.18%	0.00%	0.00%
3	96.20%	3.74%	0.03%	0.03%	0.00%
2	90.87%	7.59%	1.40%	0.13%	0.01%

MÉTODO RÁPIDO (APROXIMADO) DE ESTIMACIÓN DE DEFORMACIONES LATERALES EN EDIFICIOS



ESTIMACIÓN DEL DESPLAZAMIENTO DE TECHO / AZOTEA:

Repitiendo la ecuación de la aproximación del desplazamiento de techo / azotea

$$u_{roof} \approx \Gamma_1 \phi_{roof,1} S_{d,1}$$

Si los modos están normalizados a ser igual a uno a nivel de azotea entonces

$\phi_{roof,1} = 1$ y la ecuación anterior puede escribirse como

$$u_{roof} \approx \Gamma_1 S_{d,1}$$

MÉTODO RÁPIDO (APROXIMADO) DE ESTIMACIÓN DE DEFORMACIONES LATERALES EN EDIFICIOS



ESTIMACIÓN DEL DESPLAZAMIENTO DE TECHO / AZOTEA:

Si el primer modo se supone como lineal y si todas las masas y alturas de entrepiso son iguales entonces el producto del modo a nivel de techo/azotea en el primer modo y el factor de participación modal puede aproximarse como:

$$\Gamma_1 \phi_{1,techo} \approx \frac{\sum_{n=1}^N \left(\frac{n}{N}\right)}{\sum_{n=1}^N \left(\frac{n}{N}\right)^2} = \frac{3N}{2N+1}$$

Es interesante que este producto puede aproximarse con solo conocer el número de pisos sin embargo no toma en cuenta la verdadera forma del primer modo.

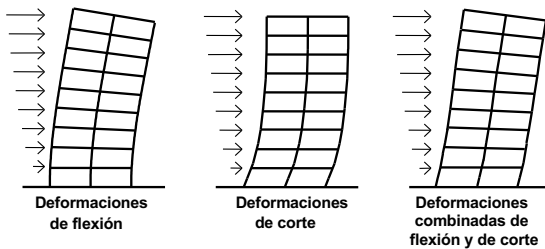
MÉTODO RÁPIDO (APROXIMADO) DE ESTIMACIÓN DE DEFORMACIONES LATERALES EN EDIFICIOS



ESTIMACIÓN DEL DESPLAZAMIENTO DE TECHO / AZOTEA:

Con la finalidad de tomar en cuenta la forma del primer modo en la estimación de deformaciones laterales en edificios, Miranda (1997, 1999) propuso un método para estimar el desplazamiento de techo / azotea y la distorsión máxima de entrepiso sabiendo únicamente el número de pisos y un parámetro adimensional α_0 .

$\alpha_0 =$ Controla el grado de participación de deformación laterales de corte y de flexión en edificios



MÉTODO RÁPIDO (APROXIMADO) DE ESTIMACIÓN DE DEFORMACIONES LATERALES EN EDIFICIOS



ESTIMACIÓN DEL DESPLAZAMIENTO DE TECHO / AZOTEA:

Un valor de $\alpha_0=0$ corresponde a un edificio cuyas deformaciones laterales son semejantes a las de una viga de flexión. Así mismo un valor de $\alpha_0>30$ corresponde to buildings that deflect laterally like shear beams.

Es importante hacer notar que no se requiere de una estimación muy precisa del valor de α_0 . Puede aproximarse en base al sistema resistente a fuerzas laterales de la estructura.

Sistema Resistente a Fuerzas Laterales	α_0	Valor de α_0 recomendado
Pórticos	5 a 20	15
Sistemas duales	1.5 a 6	4
Muros de corte o pórticos arriostrados	0 a 2	1

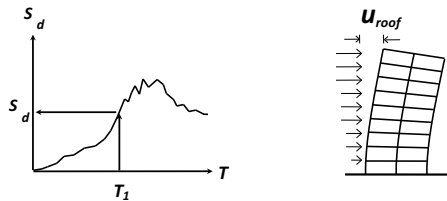
MÉTODO RÁPIDO (APROXIMADO) DE ESTIMACIÓN DE DEFORMACIONES LATERALES EN EDIFICIOS



ESTIMACIÓN DEL DESPLAZAMIENTO DE TECHO / AZOTEA:

En el método de Miranda el desplazamiento de azotea se estima con la siguiente ecuación

$$u_{roof} \approx \beta_1 S_d$$



Curso de Diseño Sismorresistente, Ecuador Julio 3-6, 2017

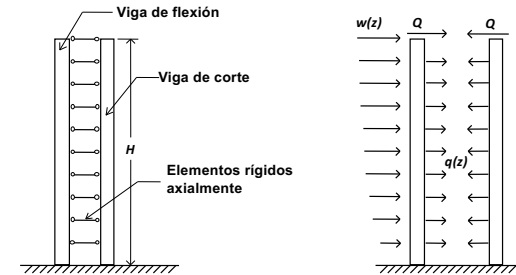
© 2017 Prof. Eduardo Miranda

MÉTODO RÁPIDO (APROXIMADO) DE ESTIMACIÓN DE DEFORMACIONES LATERALES EN EDIFICIOS



ESTIMACIÓN DEL DESPLAZAMIENTO DE TECHO / AZOTEA:

En donde el factor β_1 es una aproximación al producto del factor de participación modal del primer modo y la forma modal del primer modo a nivel de techo. La aproximación se basa en un modelo simplificado pero con bases sólidas de comportamiento mecánico de estructuras sujetas a fuerzas laterales.



Curso de Diseño Sismorresistente, Ecuador Julio 3-6, 2017

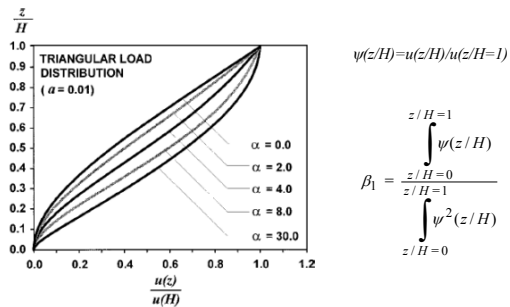
© 2017 Prof. Eduardo Miranda

MÉTODO RÁPIDO (APROXIMADO) DE ESTIMACIÓN DE DEFORMACIONES LATERALES EN EDIFICIOS



ESTIMACIÓN DEL DESPLAZAMIENTO DE TECHO / AZOTEA:

El factor β_1 se calcula aproximando el primer modo como la configuración deformada normalizada por la deformación del techo cuando el modelo es sometido a fuerzas laterales.



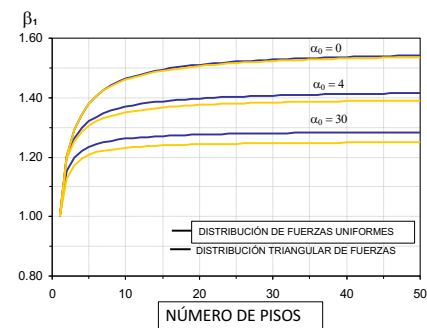
Curso de Diseño Sismorresistente, Ecuador Julio 3-6, 2017

© 2017 Prof. Eduardo Miranda

MÉTODO RÁPIDO (APROXIMADO) DE ESTIMACIÓN DE DEFORMACIONES LATERALES EN EDIFICIOS



ESTIMACIÓN DEL DESPLAZAMIENTO DE TECHO / AZOTEA:



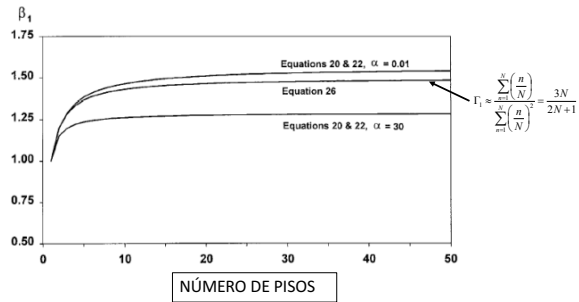
Curso de Diseño Sismorresistente, Ecuador Julio 3-6, 2017

© 2017 Prof. Eduardo Miranda

MÉTODO RÁPIDO (APROXIMADO) DE ESTIMACIÓN DE DEFORMACIONES LATERALES EN EDIFICIOS



ESTIMACIÓN DEL DESPLAZAMIENTO DE TECHO / AZOTEA:



Curso de Diseño Sismorresistente, Ecuador Julio 3-6, 2017

© 2017 Prof. Eduardo Miranda

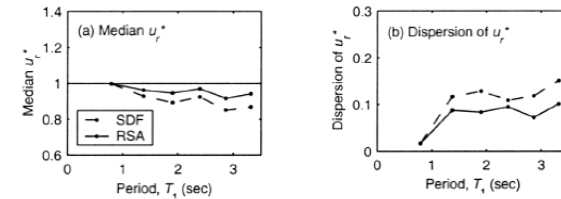
MÉTODO RÁPIDO (APROXIMADO) DE ESTIMACIÓN DE DEFORMACIONES LATERALES EN EDIFICIOS



ESTIMACIÓN DEL DESPLAZAMIENTO DE TECHO / AZOTEA:

Evaluación del método simplificado :

$$u_{roof} \approx \Gamma_1 S_{d,1}$$



(After Chopra et al 2003)

Curso de Diseño Sismorresistente, Ecuador Julio 3-6, 2017

© 2017 Prof. Eduardo Miranda

MÉTODO RÁPIDO (APROXIMADO) DE ESTIMACIÓN DE DEFORMACIONES LATERALES EN EDIFICIOS



ESTIMACIÓN DEL DESPLAZAMIENTO DE TECHO / AZOTEA:

Miranda (1991, 1997, 1999) propuso que para estructuras con comportamiento no lineal el desplazamiento del techo se estime con la siguiente ecuación

$$u_{roof} \approx \beta_1 \beta_3 S_d$$

Donde el factor β_3 es una factor que relaciona el valor promedio del cociente de deformaciones elásticas a deformaciones elásticas

$$\beta_3 = C_R = 1 + \left[\frac{1}{a(I/T_1)^b} - \frac{1}{c} \right] (R - 1)$$

Curso de Diseño Sismorresistente, Ecuador Julio 3-6, 2017

© 2017 Prof. Eduardo Miranda

MÉTODO RÁPIDO (APROXIMADO) DE ESTIMACIÓN DE DEFORMACIONES LATERALES EN EDIFICIOS



ESTIMACIÓN DEL DESPLAZAMIENTO DE TECHO / AZOTEA:

En el documento ASCE 41 para la evaluación y refuerzo de estructuras existentes el desplazamiento de azotea se calcula con la siguiente ecuación

$$\delta_i = C_0 C_1 C_2 S_a \frac{T_e^2}{4\pi^2} g$$

Lo que en el método original yo llame β_1 en el documento ASCE 41 es C_0 y lo que el método original era β_3 en el documento ASCE 41 es el factor C_1 .

Curso de Diseño Sismorresistente, Ecuador Julio 3-6, 2017

© 2017 Prof. Eduardo Miranda

MÉTODO RÁPIDO (APROXIMADO) DE ESTIMACIÓN DE DEFORMACIONES LATERALES EN EDIFICIOS



ESTIMACIÓN DEL DESPLAZAMIENTO DE TECHO / AZOTEA:

C_1 en los documentos FEMA 440 y ASCE 41

Existían varios problemas en las ecuaciones que se usaban para calcular el factor C_1 en los documentos FEMA 273 y FEMA 356. Dichos problemas se han corregido en los documentos FEMA 440 y ASCE 41 en donde el cociente entre deformaciones inelásticas a elástica se calcula con la siguiente expresión:

$$C_1 = 1 + \left[\frac{1}{a T^2} \right] (R - 1)$$

En donde

$a = 130$ para sitios tipo B

$a = 90$ para sitios tipo C

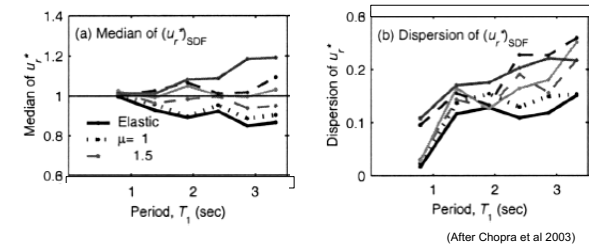
$a = 60$ para sitios tipo D

MÉTODO RÁPIDO (APROXIMADO) DE ESTIMACIÓN DE DEFORMACIONES LATERALES EN EDIFICIOS



ESTIMACIÓN DEL DESPLAZAMIENTO DE TECHO / AZOTEA:

Evaluación de la estimación del desplazamiento de techo en edificios con comportamiento no lineal:



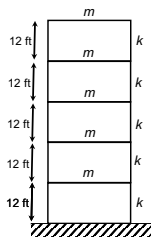
MÉTODO RÁPIDO (APROXIMADO) DE ESTIMACIÓN DE DEFORMACIONES LATERALES EN EDIFICIOS



ESTIMACIÓN DEL DESPLAZAMIENTO DE TECHO / AZOTEA:

Ejemplo:

Estimate el desplazamiento de techo en un edificio de cinco niveles con masa y rigidez lateral uniforme a lo largo de la altura y visto en la clase anterior (también es el edificio mostrado en la figura 12.8.1 en el libro de Chopra). Suponga que el sistema estructural es a base de pórticos de acero. Las alturas de entrepiso son de 12 pies. El periodo fundamental del edificio es de 2.0 segundos.



Recuerde que, como se mencionó anteriormente, este edificio usado por Chopra en intencionalmente muy flexible para exagerar la contribución de los modos superiores.

MÉTODO RÁPIDO (APROXIMADO) DE ESTIMACIÓN DE DEFORMACIONES LATERALES EN EDIFICIOS

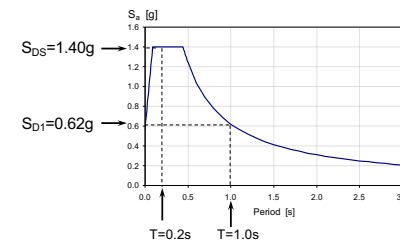


ESTIMACIÓN DEL DESPLAZAMIENTO DE TECHO / AZOTEA:

Ejemplo: (cont.)

Solución:

El espectro de diseño es el siguiente



MÉTODO RÁPIDO (APROXIMADO) DE ESTIMACIÓN DE DEFORMACIONES LATERALES EN EDIFICIOS

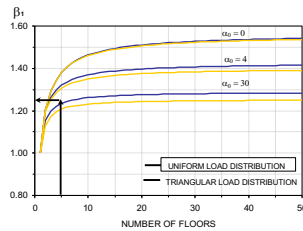


ESTIMACIÓN DEL DESPLAZAMIENTO DE TECHO / AZOTEA:

Ejemplo (cont.)

Como el periodo fundamental de vibración se encuentra en la rama descendente del espectro de diseño, entonces la ordenada del espectro de desplazamiento para el periodo fundamental se calcula como:

$$S_d = \frac{S_{D1} \cdot g}{T} \cdot \frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{0.62(386.2)}{2.0} \cdot \frac{(2.0)^2}{4\pi^2} = 12.1 \text{ in}$$



$$u_{roof} \approx 1.25(12.1) = 15.1 \text{ in}$$

Note que como $T > 1.2s$, entonces podemos usar la aproximación de igual desplazamientos ($C_R = \beta_3 = 1$) y por lo tanto este desplazamiento es también la estimación del desplazamiento inelástico..

MÉTODO RÁPIDO (APROXIMADO) DE ESTIMACIÓN DE DEFORMACIONES LATERALES EN EDIFICIOS



ESTIMACIÓN DE LA DISTORSIÓN MÁXIMA DE ENTREPISO:

El parámetro que está mejor correlacionado con el daño estructural y con muchos tipo de daño no estructural es la distorsión de entrepiso, por lo que su estimación es de SUMA IMPORTANCIA en la ingeniería sismorresistente.

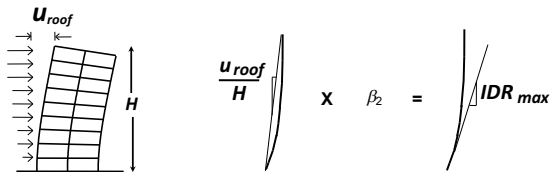
MÉTODO RÁPIDO (APROXIMADO) DE ESTIMACIÓN DE DEFORMACIONES LATERALES EN EDIFICIOS



ESTIMACIÓN DE LA DISTORSIÓN MÁXIMA DE ENTREPISO:

Miranda (1997, 1999) propuso un método la estimar la distorsión máxima de entrepiso con la siguiente ecuación

$$IDR_{max} = \beta_2 \frac{u_{roof}}{H} = \beta_2 \frac{u(z/H=1)}{H}$$

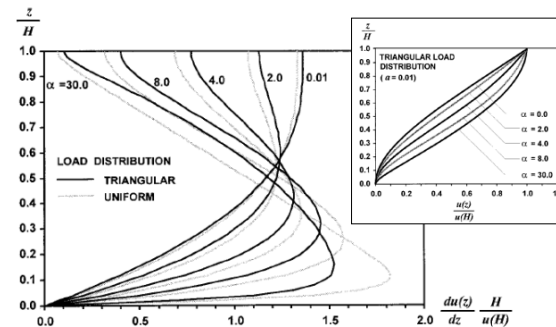


MÉTODO RÁPIDO (APROXIMADO) DE ESTIMACIÓN DE DEFORMACIONES LATERALES EN EDIFICIOS

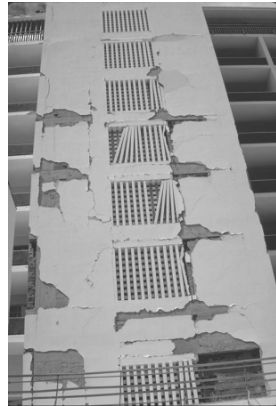


ESTIMACIÓN DE LA DISTORSIÓN MÁXIMA DE ENTREPISO:

$$IDR_{max} = \beta_2 \frac{u_{roof}}{H} = \beta_2 \frac{u(z/H=1)}{H}$$



MÉTODO RÁPIDO (APROXIMADO) DE ESTIMACIÓN DE DEFORMACIONES LATERALES EN EDIFICIOS



(Photo by K. Steinbrugge, 1967)

Curso de Diseño Sismorresistente, Ecuador Julio 3-6, 2017

© 2017 Prof. Eduardo Miranda

MÉTODO RÁPIDO (APROXIMADO) DE ESTIMACIÓN DE DEFORMACIONES LATERALES EN EDIFICIOS



(Photo by K. Steinbrugge, 1967)

Curso de Diseño Sismorresistente, Ecuador Julio 3-6, 2017

© 2017 Prof. Eduardo Miranda

MÉTODO RÁPIDO (APROXIMADO) DE ESTIMACIÓN DE DEFORMACIONES LATERALES EN EDIFICIOS



(Photo by K. Steinbrugge, 1967)

Curso de Diseño Sismorresistente, Ecuador Julio 3-6, 2017

© 2017 Prof. Eduardo Miranda

MÉTODO RÁPIDO (APROXIMADO) DE ESTIMACIÓN DE DEFORMACIONES LATERALES EN EDIFICIOS



(Photo by K. Steinbrugge, 1967)

Curso de Diseño Sismorresistente, Ecuador Julio 3-6, 2017

© 2017 Prof. Eduardo Miranda

MÉTODO RÁPIDO (APROXIMADO) DE ESTIMACIÓN DE DEFORMACIONES LATERALES EN EDIFICIOS



(Photo by K. Steinbrugge, 1967)

Curso de Diseño Sismorresistente, Ecuador Julio 3-6, 2017

© 2017 Prof. Eduardo Miranda

MÉTODO RÁPIDO (APROXIMADO) DE ESTIMACIÓN DE DEFORMACIONES LATERALES EN EDIFICIOS



(Photo by K. Steinbrugge, 1967)

Curso de Diseño Sismorresistente, Ecuador Julio 3-6, 2017

© 2017 Prof. Eduardo Miranda

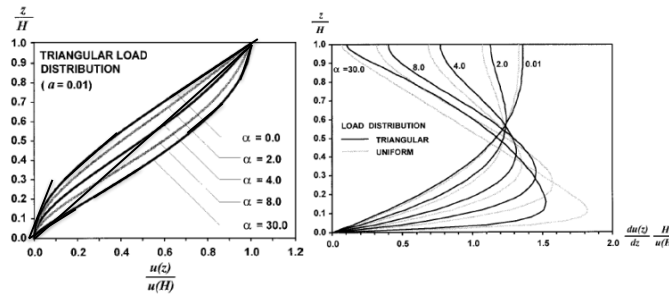
MÉTODO RÁPIDO (APROXIMADO) DE ESTIMACIÓN DE DEFORMACIONES LATERALES EN EDIFICIOS



ESTIMACIÓN DE LA DISTORSIÓN MÁXIMA DE ENTREPISO:

$$IDR_{max} = \beta_2 \frac{u_{roof}}{H} = \beta_2 \frac{u(z/H=1)}{H}$$

$$\beta_2 = \max \left[\frac{du(z/H)}{dz} \frac{H}{u(z/H=1)} \right]$$



Curso de Diseño Sismorresistente, Ecuador Julio 3-6, 2017

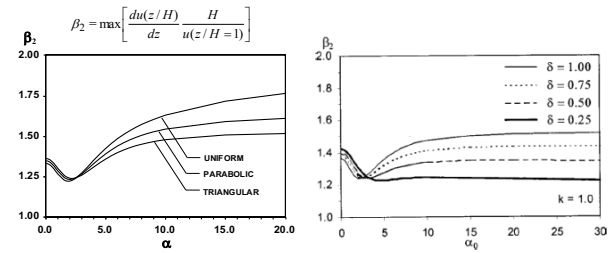
© 2017 Prof. Eduardo Miranda

MÉTODO RÁPIDO (APROXIMADO) DE ESTIMACIÓN DE DEFORMACIONES LATERALES EN EDIFICIOS



ESTIMACIÓN DE LA DISTORSIÓN MÁXIMA DE ENTREPISO:

$$IDR_{max} = \beta_2 \frac{u_{roof}}{H} = \beta_2 \frac{u(z/H=1)}{H}$$



Curso de Diseño Sismorresistente, Ecuador Julio 3-6, 2017

© 2017 Prof. Eduardo Miranda

MÉTODO RÁPIDO (APROXIMADO) DE ESTIMACIÓN DE DEFORMACIONES LATERALES EN EDIFICIOS

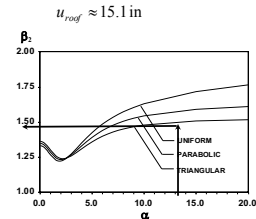
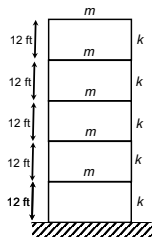


ESTIMACIÓN DE LA DISTORSIÓN MÁXIMA DE ENTREPISO:

Ejemplo:

Estime la deformación máxima de entrepiso para el edificio de cinco niveles utilizado en ejemplos anteriores.

Solución:
Del ejemplo anterior sabemos que



La estimación de la distorsión máxima de entrepiso es:

$$IDR_{max} \approx \beta_2 \frac{u_{roof}}{H_{roof}} = 1.5 \frac{15.1 \text{ in}}{5(144)} = 0.031$$

MÉTODO RÁPIDO (APROXIMADO) DE ESTIMACIÓN DE DEFORMACIONES LATERALES EN EDIFICIOS



ESTIMACIÓN DE LA DISTORSIÓN MÁXIMA DE ENTREPISO:

La deformación máxima de entrepiso se estima como

$$IDR_{max} \approx \beta_1 \beta_2 \beta_3 \frac{S_d}{H_{roof}}$$

MÉTODO RÁPIDO (APROXIMADO) DE ESTIMACIÓN DE DEFORMACIONES LATERALES EN EDIFICIOS



ESTIMACIÓN DE LA DISTORSIÓN MÁXIMA DE ENTREPISO:

Evaluación del método aproximado

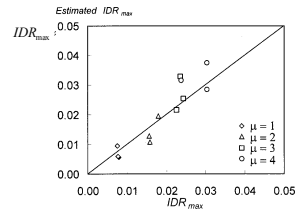


Fig. 17. Comparison of interstory drift ratios computed using detailed two-dimensional nonlinear time history analyses with those computed with simplified method

JOURNAL OF STRUCTURAL ENGINEERING / JULY 2002 / 847

(After Miranda and Reyes, 2002)

DISEÑO PRELIMINAR BASADO EN DESPLAZAMIENTOS



Con base al método de Miranda (1997, 1999) se puede obtener el diseño preliminar de un edificio siguiendo los siguientes pasos:

PASO 1

Con base al material estructural, el sistema estructural y el nivel de detallado que tendrá el edificio determine la deformación máxima tolerable, IDR_{max} , en el edificio para el sismo de diseño.

PASO 2

Calcule el factor β_2 en función del sistema resistente a cargas laterales en el edificio y después la deformación máxima de techo puede estimarse como

$$\frac{u_{roof}}{H_{roof}} \approx \frac{IDR_{max}}{\beta_2}$$

PASO 3

El desplazamiento de techo máximo tolerable puede entonces calcularse como:

$$u_{roof} \approx \frac{u_{roof}}{H_{roof}} H_{roof} = \frac{IDR_{max} H_{roof}}{\beta_2}$$

DISEÑO PRELIMINAR BASADO EN DESPLAZAMIENTOS



PASO 4

Si la estructura probablemente se localice en la región espectral en que la aproximación de igual desplazamientos es válida entonces el desplazamiento del techo será el desplazamiento de techo elástico. Si este no fuera el caso entonces el desplazamiento de techo máximo elástico estaría dado por

$$u_{roof} \approx \frac{IDR_{max}}{\beta_2 \beta_3} H_{roof}$$

PASO 5

La ordenada máxima de desplazamiento elástico puede aproximarse como

$$S_d \approx \frac{u_{roof}}{\beta_1}$$

PASO 6

Determine el valor máximo del periodo fundamental de vibración a partir del espectro de diseño o el espectro de peligro sísmico uniforme

Curso de Diseño Sismorresistente, Ecuador Julio 3-6, 2017

© 2017 Prof. Eduardo Miranda

DISEÑO PRELIMINAR BASADO EN DESPLAZAMIENTOS



Ejemplo:

Estimate el periodo de vibración máximo de un edificio de 9 pisos que será construido a base de pórticos de acero y que será localizado en un sitio rocoso tipo B en el centro de la ciudad de Berkeley y considerando el sismo con probabilidad de excedencia de 2% en 50 años. Suponga que la rotación plástica máxima tolerable es de 0.03 y que la deformación de entrepiso de fluencia es de 0.01. Suponga que la altura promedio de entrepiso es de 13 pies.

Solución:

PASO 1

$$IDR_{max} \approx 0.03 + 0.1 = 0.04$$

PASO 2

Calcule el factor β_2 en función del sistema resistente a cargas laterales en el edificio y después la deformación máxima de techo puede estimarse como

$$\frac{u_{roof}}{H_{roof}} \approx \frac{IDR_{max}}{\beta_2}$$

$$\frac{u_{roof}}{H_{roof}} \approx \frac{IDR_{max}}{\beta_2} = \frac{0.04}{1.5} = 0.0267$$

Curso de Diseño Sismorresistente, Ecuador Julio 3-6, 2017

© 2017 Prof. Eduardo Miranda

DISEÑO PRELIMINAR BASADO EN DESPLAZAMIENTOS



Solución: (cont.)

PASO 3

$$u_{roof,inel} = \frac{u_{roof}}{H_{roof}} H_{roof} = (0.0267)(13)(12) = 33.3 \text{ in}$$

PASO 4

Un edificio de ocho niveles a base de pórticos probablemente tendrá un periodo de vibración que se localice en la zona donde la aproximación de igual desplazamientos es válida, por lo tanto podemos tomar $\beta_3=1$ y por lo tanto

$$u_{roof,elas} \approx \frac{u_{roof,inel}}{\beta_3} = \frac{33.3}{1.0} = 33.3 \text{ in}$$

PASO 5

Para un edificio a base de pórticos el valor de α_0 puede suponerse como igual a 15. Este valor, junto con $N=8$ nos conduce a un valor de $\beta_1=1.28$, con este valor la ordenada espectral máxima está dada por:

$$S_d \approx \frac{u_{roof,elas}}{\beta_1} = \frac{33.3}{1.28} = 26.0 \text{ in}$$

Curso de Diseño Sismorresistente, Ecuador Julio 3-6, 2017

© 2017 Prof. Eduardo Miranda

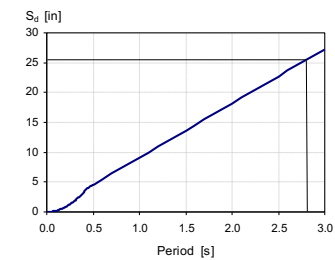
DISEÑO PRELIMINAR BASADO EN DESPLAZAMIENTOS



Ejemplo (cont.)

$$S_{d,max} \approx 26.0 \text{ in}$$

$$T_1 \leq 2.8 \text{ s}$$



Curso de Diseño Sismorresistente, Ecuador Julio 3-6, 2017

© 2017 Prof. Eduardo Miranda

RESUMEN



1. Se hizo un breve repaso del método modal espectral en que las respuestas modales pico se combinan mediante reglas APROXIMADAS (raíz cuadrada de la suma de los cuadrados y combinación cuadrática completa, CQC). Se presentó un ejemplo de aplicación de este método.
2. Se presentó un método aproximado para estimar las deformaciones laterales de un edificio y se presentó un método de diseño basado en desplazamientos.



PROF. EDUARDO MIRANDA

© Todos los derechos reservados